

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Objetivos:

- ✓ Definir ecuación de segundo grado.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando propiedades de la igualdad.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando factorizaciones.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado completando el trinomio cuadrado perfecto.
- ✓ Resolver la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.
- ✓ Identificar la naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado analizando el discriminante.

Una ecuación con una incógnita es de segundo grado o cuadrática, cuando después de reducirla a su más simple expresión, el más alto grado de la incógnita es 2.

La forma general de una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

en la cual a , b y c son los coeficientes

Ejemplo:

Los coeficientes de la ecuación:

$$20x^2 - 61x + 8 = 0$$

son:

$$a = 20, b = -61, c = 8$$

La ecuación es *completa* cuando a , b y c son distintos de cero, esto es la ecuación tiene el término cuadrado, el término lineal y el término independiente

Solución de ecuaciones de segundo grado en su forma incompleta:

La ecuación es *incompleta* cuando $b = 0$, $c = 0$ o ambos son cero. La ecuación *incompleta* tiene estas dos formas de presentación:

$$ax^2 + c = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$ax^2 + bx = 0 \quad \dots \quad (3)$$

La solución de ecuaciones de segundo cuya presentación es de la forma (2) es muy sencilla pues en ella solo se aplican trasposiciones simples, esto es:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Así la incógnita es igual a más o menos la raíz cuadrada del cociente del término independiente, entre el coeficiente de x^2 , con el signo cambiado.

En la solución de la forma (3) solo hay que factorizar, de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Este último producto se anula si se anula uno de los dos factores. Así

para $x = 0$ tenemos una solución

y

para $ax + b = 0$ la otra

esto es:

$$x = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

La ecuación de segundo grado en que falta el término independiente tiene una raíz nula, y la otra es igual al coeficiente de x tomado con signo contrario, dividido entre el coeficiente de x^2

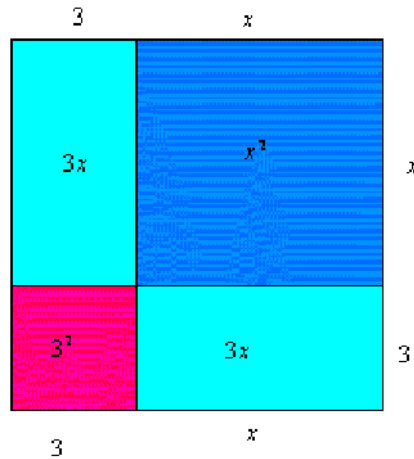
Resolución geométrica de la ecuación completa:

Los algebristas antiguos resolvían las cuadráticas por procedimientos fundamentalmente geométricos, como el que consiste en completar un cuadrado, según se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$x^2 + 6x = 55$$



Trácese un cuadrado cualquiera de lado x cuya área es x^2 , colóquese, apoyados en los lados de x^2 , dos rectángulos de bases iguales a 3 unidades ($3 = \text{mitad de } 6$, que es el coeficiente de el término lineal de la ecuación dada). Si a la figura resultante se le agrega el cuadrado de área 3^2 se completa el cuadrado total (ver figura anterior), cuya superficie es:

$$\left(\begin{array}{c} x^2 + 6x \\ \text{en azules} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 3^2 \\ \text{en violeta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 55 \\ \text{en azules} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 9 \\ \text{en violeta} \end{array} \right)$$

esto es:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 64$$

Despejando x de esta última ecuación tenemos:

$$x + 3 = \sqrt{64}$$

$$x + 3 = 8$$

$$x = 5$$

Este procedimiento sólo proporciona la raíz positiva.

Para completar el cuadrado, se ha agregado a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal

Resolución algebraica de la ecuación completa:

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2 + 11x - 60 = 0$$

Pásese el término independiente al segundo miembro	$x^2 + 11x = 60$
Agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal a cada miembro para completar el trinomio cuadrado perfecto	$x^2 + 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 60 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$

<p>Expresese el trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado</p>	$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 60 + \frac{121}{4} = \frac{361}{4}$
<p>Extraíga la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación</p>	$\sqrt{\left(x + \frac{11}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{4}}$ $x + \frac{11}{2} = \pm \sqrt{\frac{361}{4}}$
<p>Despeje x</p>	$x = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}}$ <p>eso es:</p> $x = -\frac{11}{2} \pm \frac{19}{2}$
<p>Las soluciones son:</p>	$x_1 = 4$ $x_2 = -15$

Fórmula general:

Resolver la ecuación literal:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

<p>Divídase cada término entre a, para reducir este caso a la forma anterior, y luego proceder de igual manera</p>	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
<p>Pásese el término independiente al segundo miembro</p>	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
<p>Agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal a cada miembro para completar el trinomio cuadrado perfecto</p>	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
<p>Expresa el trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado</p>	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
<p>Extraíga la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación</p>	$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

Despeje x	$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>eso es:</p> $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Las soluciones son:	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo 1.-

Resolver aplicando la fórmula general

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Solución:

Sea

$$a = 1 \quad b = -9 \quad c = 20$$

Sustituyendo en la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{81 - 4(1)(20)}}{2(1)} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

las raíces son:

$$x_1 = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{9-1}{2} = 4$$

Ejemplo:

Resolver aplicando la fórmula general

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{12}$$

Para poder aplicar la fórmula general deberemos de reducir la ecuación a su forma general, para ello realizaremos las operaciones con las fracciones algebraicas con el propósito de expresar la ecuación como una proporción, esto es:

$$\frac{(1)(x+1) + (1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5}{12}$$

esto es:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{5}{12}$$

Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos tenemos que:

$$(2x)(12) = (5)(x^2 - 1)$$

$$24x = 5x^2 - 5$$

Trasponiendo llegamos a la forma general de la ecuación de segundo grado:

$$-5x^2 + 24x + 5 = 0$$

Con $a = -5$, $b = 24$, $c = 5$, aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{-(24) \pm \sqrt{(24)^2 - 4(-5)(5)}}{2(-5)} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 100}}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-24 + 26}{-10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-24 - 26}{-10} = 5$$

Comprobación:

$$\frac{1}{5-1} + \frac{1}{5+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{5}-1} + \frac{1}{-\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{-\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{6} + \frac{4}{5} = \frac{5}{12}$$

Ejemplo:

Resolver aplicando la fórmula general

$$mnx^2 - (m+n)x + 1 = 0$$

Sean:

$$a = mn$$

$$b = -(m+n)$$

$$c = 1$$

Aplicando la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mn}}{2mn}$$

esto es:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}}{2mn}$$

esto es:

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{m^2 - 2mn + n^2}}{2mn}$$

$$x = \frac{(m+n) \pm \sqrt{(m-n)^2}}{2mn}$$

$$x = \frac{(m+n) \pm (m-n)}{2mn}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{m+n+m-n}{2mn} = \frac{2m}{2mn} = \frac{1}{n}$$

$$x_2 = \frac{m+n-m+n}{2mn} = \frac{2n}{2mn} = \frac{1}{m}$$

Comprobación:

$$mn \times \frac{1}{n^2} - (m+n) \frac{1}{n} + 1 = \frac{m}{n} - \frac{m}{n} - 1 + 1 = 0$$

$$mn \times \frac{1}{m^2} - (m+n) \frac{1}{m} + 1 = \frac{n}{m} - 1 - \frac{n}{m} + 1 = 0$$

La naturaleza de las raíces:

Las raíces de la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radicando, o sea, el binomio

$$b^2 - 4ac,$$

se llama *discriminante*

o binomio característico de la ecuación de segundo grado. El carácter de las raíces depende de dicho binomio y basta una simple inspección de él para conocer la naturaleza de dichas raíces, sin necesidad de resolver la ecuación.

ecuación	Discriminante	Soluciones:
$x^2 - 4x + 3 = 0$	$(-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$	$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$ $x = 3 \quad y \quad x = 1$ (dos raíces reales diferentes)
$x^2 - 4x + 2 = 0$	$(-4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8$	$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$ (dos raíces reales diferentes)
$x^2 - 4x + 4 = 0$	$(-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$	$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$ Una raíz real (doble)
$x^2 - 4x + 5 = 0$	$(-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$	$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ raíces complejas

Así tenemos que:

- ✓ Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y diferentes.
- ✓ Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es imaginario, las raíces son complejas.
- ✓ Si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales, iguales, o sea hay una raíz doble.